

## Вопросы по курсу функционального анализа

1. Определение кольца, минимального кольца, алгебры, полукольца, структура минимального кольца.
2. Примеры мер и зарядов. Определение меры на полукольца. Пример не  $\sigma$ -аддитивной меры.
3. Непрерывные и  $\sigma$ -аддитивные меры. Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо.
4. Сигма аддитивность длины. Определение и свойства внешней меры, измеримость по Лебегу.
5. Критерий измеримости по Лебегу.
6. Измеримость по Жордану. Сравнение с мерой Лебега.
7. Свойства измеримых множеств,  $\sigma$ -конечная мера.
8. Канторово множество, пример неизмеримого множества.
9. Мера Лебега-Стилтьеса, необходимое и достаточное условие  $\sigma$ -аддитивной меры.
10. Абсолютная непрерывность одной меры относительно другой, критерий абсолютной непрерывности меры относительно меры Лебега, пример неабсолютно непрерывной меры.
11. Измеримые функции, измеримость непрерывной функции, предела измеримых функций, производной.
12. Измеримость суммы, разности, произведения, частного измеримых функций. Теорема Егорова.
13. Сходимость по мере, единственность предела. Связь со сходимостью почти всюду.
14. Интеграл Лебега от простых функций, от ограниченных и неограниченных функций.
15. Интегрируемые функции и их свойства.
16. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега, теорема Лебега о предельном переходе.
17. Теоремы Леви и Фату. Интегрирование по множеству с  $\sigma$ -конечной мерой.
18. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана. Пример функции неинтегрируемой по Риману даже при изменении на множестве меры нуль.
19. Пространство  $L_1$ , его полнота, плотность множества непрерывных функций в  $L_1$ .
20. Неравенство Гельдера, Минковского, полнота пространства  $L_p$ , непрерывность в среднем функций из  $L_p$ .
21. Заряды, представление заряда в виде разности двух взаимно сингулярных мер.
22. Теорема Радона-Никодима, производная Радона-Никодима.
23. Теорема Фубини о перестановке интегрирования.
24. Метрические пространства, пересечение открытых и замкнутых множеств, полные метрические пространства, непрерывные отображения.
25. Принцип сжимающих отображений, локальная форма принципа, примеры применения к решению интегральных уравнений.
26. Теорема Хаусдорфа о пополнении метрического пространства.
27. Плотные, нигде не плотные множества, принцип вложенных шаров, понятие категории, теорема Бэра-Хаусдорфа. Пример вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.
28. Компактные метрические пространства, их полнота, свойство ограниченности и вполне ограниченности.
29. Необходимое и достаточное условие предкомпактности, предкомпактность пространства при наличии предкомпактной сети.
30. Эквивалентность двух определений компактности.

31. Критерии предкомпактности в  $C$ ,  $L_p$ ,  $l_p$ .
32. Банаховы пространства, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного оператора, полнота пространства линейных ограниченных операторов.
33. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема о расходимости тригонометрического ряда.
34. Обратные операторы, правый, левый обратные операторы. Обратимые операторы, признак обратимости.
35. Обратимость оператора  $E-A$ . Открытость множества обратимых операторов, сходимость обратных операторов.
36. Теорема Банаха об обратном операторе. Замкнутые операторы, теорема о замкнутом графике.
37. Теорема Хана-Банаха и следствия из нее.
38. Сопряженное пространство, связь между сепарабельностью исходного и сопряженного пространства.
39. Второе сопряженное пространство, рефлексивные пространства. Представление линейного ограниченного функционала в  $l_p$ .
40. Слабая сходимость, ограниченность слабо сходящейся последовательности, слабая полнота рефлексивного пространства, признак слабой компактности.